

Függvények határértéke, folytonossága

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKÉNEK SZÁMÍTÁSA, PÉLDÁK FOLYTONOS
FÜGGVÉNYEKRE

Olvasmány: Néhány nevezetes függvényhatárérték

A későbbiekben szükségünk lesz a következő három nevezetes függvényhatárértékre.

1. példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Megoldás

Bármely $x_n > 1$ -re teljesül, hogy $[x_n] \leq x_n < [x_n] + 1$. Jelölje $m = [x_n]$ -t, így reciprokaikra: $\frac{1}{m+1} < \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{m}$. Mivel $x_n \rightarrow \infty$, ebből adódóan $m \rightarrow \infty$ és $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$. A rendőrelvet alkalmazva:

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} < \lim_{x_n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0.$$

Mivel x_n tetszőleges végtelenbe tartó sorozat, ezért $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. példa

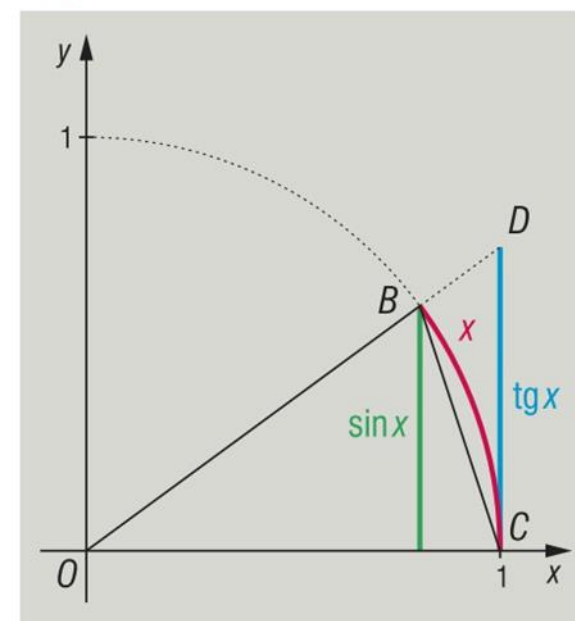
Számoljuk ki a következő határértéket: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Tekintsük az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvényt.

Ez a függvény páros, mivel $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, ezért elegendő a pozitív tagokból álló x_n sorozatokat vizsgálni.

Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az $x, \sin x, \tan x$ értékeit, ha $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (lásd ábra).

Határozzuk meg az ábrán látható OCB háromszög, OCB körcikk és ODC háromszög területét:



23. ábra

OCB háromszög területe:

OC=1 oldalhoz tartozó magasság $\sin x$, ezért $T_{OCB} = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$

OCB körcikk területe:

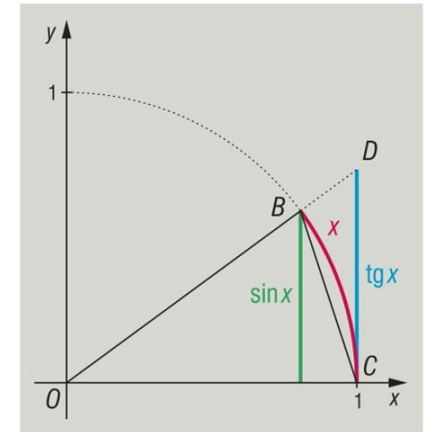
az ív és a sugár szorzatának a fele, ezért $T_{OCB\text{ körcikk}} = \frac{1 \cdot x}{2}$

OCD háromszög területe:

OC=1 oldalhoz tartozó magasság $\tan x$, ezért $T_{OCD} = \frac{1 \cdot \tan x}{2}$

A területek között nyilvánvalóan fennáll az alábbi egyenlőtlenség-lánc:

$$T_{OCB} < T_{OCB\text{ körcikk}} < T_{OCD}.$$



23. ábra

Tehát:

$$T_{OCB} < T_{OCB\frac{\pi}{4}} < T_{OCD}, \text{ azaz} \\ \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}, \text{ amiből} \\ \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Bármely hegyesszög szinusa pozitív, ezért ha vele végig osztunk, a relációs jel nem változik. A reciprokukat véve viszont fordul a relációs jelek iránya:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Ha $x_n \rightarrow 0$, akkor $1 \rightarrow 1$ és $\cos x_n \rightarrow 1$ (mivel a koszinusz függvény folytonos). A rendőrelv alapján ebből következik, hogy

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$



3. példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Megoldás

Legyen $x_n \geq 1$ és $x_n \rightarrow \infty$. Ha $[x_n] = m_n$, akkor

$$m_n \leq x_n < m_n + 1.$$

A hatványozás tulajdonságai miatt:

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1}.$$

Mivel $x_n \rightarrow \infty$, ezért $m_n \rightarrow \infty$, és

$$\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{-1} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^1.$$

A konstans kitevőjű m_n -t tartalmazó tényezők 1-hez tartanak, míg az m_n -t tartalmazó kitevőjűek e -hez tartanak. A rendőrelv értelmében így bármely $x_n > 1$, $x_n \rightarrow \infty$ sorozatra:

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

Megjegyzés: Ha $x_n \rightarrow -\infty$, a bizonyítás hasonló, és a függvény határértéke újra e .

Kidolgozott mintafeladatok:

Nézzünk most néhány fogást, amelyeket különböző függvények határértékének meghatározásánál alkalmazhatunk. Ezekben felhasználjuk a fenti három példa eredményét. A feladatok megoldása során a problémát folytonos függvényekre próbáljuk visszavezetni: ha sikerül, akkor a határérték egyenlő a függvény helyettesítési értékével. Kihasz- náljuk azt, hogy az általunk ismert elemi függvények az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak (az egészrész, a törtrész, a szignum és az abszolút érték nem elemi függvény).

A következő feladatokat törtes feladatoknak nevezzük. Más fogást kell bevetnünk, ha véges helyen, illetve ha végtelen helyen kell a függvény határértékét vizsgálni. Az első feladatcsokor véges helyen vett határ- értékek meghatározásával foglalkozik.

4. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2-5x+6};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

Megoldás (a)

Az ilyen típusú feladatoknál először azt nézzük meg, hogy azon a helyen, ahol a függvényhatárértéket vizsgáljuk, értelmezve van-e a függvény. Ha igen, akkor a függvény ezen a helyen folytonos, és a függvény határértéke egyenlő a függvény helyettesítési értékével. Mivel az $x = 0$ helyen $x^2 - 5x + 6 \neq 0$, ezért a határérték a függvényérték lesz. Így

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Megoldás (b)

A függvény $x = 1$ pontban nincs értelmezve, mivel nevezője 0. Ilyen esetben érdemes megpróbálkozni azzal, hogy szorzattá alakítjuk a nevezőt és a számlálót. Ha a szorzattá alakítás után sikerül egyszerűsíteni, akkor újra vizsgálnunk kell, hogy a maradék folytonos-e az adott pontban. Ha igen (mint esetünkben), akkor a határértéket behelyettesítéssel meg tudjuk határozni:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Vigyázzunk, $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
csak akkor egyenlő
 $y = x + 1$ függvénnyel,
ha $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$!

Megoldás (c)

A nevező $x = 2$ esetén 0. Alakítsuk a nevezőt szorzattá! Ha ránézésre nem megy, használjuk a gyöktényezős alakot:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Így a határértékre kapjuk:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2) \cdot (x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 3} = -1.$$

Megoldás (d)

Használjuk ki az abszolút érték fogalmát.

Ha pozitív x_n számokon át tartunk 0-hoz, akkor $|x_n| = x_n$, így a jobb oldali határérték:

$$\lim_{x_n^+ \rightarrow 0} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{x_n^+ \rightarrow 0} \frac{x_n}{x_n} = 1.$$

Ha negatív x_n sorozattal tesszük meg ugyanezt, akkor $|x_n| = -x_n$, így a bal oldali határérték:

$$\lim_{x_n^- \rightarrow 0} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{x_n^- \rightarrow 0} \frac{-x_n}{x_n} = -1.$$

Mivel a bal oldali és a jobb oldali határérték nem egyenlő, ezért a függvénynek a 0 pontban nincs határértéke.

Megjegyzés: Ha az átalakítások során nem sikerül olyan függvénnyé alakítanunk a feladatot, amely a vizsgálandó pontban folytonos, akkor a bal és jobb oldali határértékek összehasonlításával próbálkozhatunk.

A törtes határértékek közé tartoznak a $\frac{\sin x}{x}$ feladatra visszavezethető határérték-problémák.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

5. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x}; & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x}; & c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x}; \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x}; & e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}; & f) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x; \\ g) \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{x - 2\pi}. \end{array}$$

Megoldás (a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{5}.$$

Megoldás (b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7 \cdot \frac{\sin 7x}{7x} = 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7.$$



A konstans szorzó a limesz elé vihető (sorozatok),
illetve $\frac{\sin 7x_n}{7x_n}$ a $\frac{\sin x_n}{x_n}$
részsorozata.

Megoldás (c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{5} \cdot \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{5}.$$

Megoldás (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{5} \cdot \frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{7}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 5x}{5x}} = \frac{7}{5}.$$

Megoldás (e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1.$$



Általában azok a nehezebb feladatok, melyekben több egyszerű fogást kell egymás után alkalmazni.



Megoldás (f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Megjegyzés: Az $x = 0$ helyen $\cos x$ folytonos, és értéke 1.

Megoldás (g)

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin[(x - 2\pi) + 2\pi]}{x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin(x - 2\pi)}{x - 2\pi} \cdot \cos 2\pi = 1.$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

A problémát azon átalakítások megtalálása jelenti, melyek segítségével nevezetes határértékre tudjuk visszavezetni az eredeti feladatot.

Következő feladataink végtelenben vett határértékek meghatározását kéri. Az ilyen típusú példákat lényegében a sorozatoknál megismert fogásokkal lehet megoldani, „csak” arra kell vigyázni, hogy a végtelennek előjele is van.

6. példa

Számoljuk ki a következő határértékeket:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 12x + 1}{13x^3 + 100x^2 + 5};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 7x^2}{x^3 + 3x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x - 7} - 2x);$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-3} \right)^{-x-7}.$$

Megoldás (a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 12x + 1}{13x^3 + 100x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{13 + \frac{100}{x} + \frac{5}{x^3}} = \frac{7}{13}.$$

Megoldás (b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 7x^2}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{7}{x}}{1 + \frac{3}{x^2}} = -\infty.$$

Megoldás (c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x - 7} - 2x) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 5x - 7} - 2x) \cdot (\sqrt{4x^2 + 5x - 7} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 5x - 7} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 5x - 7} + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{7}{x}}{\sqrt{4 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}} + 2} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Megoldás (d)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x-3} \right)^{-x-7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-3} \right)^{-x-7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1,5} \right)^{-x-7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1,5} \right)^{-(x-1,5)-8,5} = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1,5} \right)^{x-1,5} \right]^{-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1,5} \right)^{-8,5} = e^{-1}.\end{aligned}$$

A következő két feladatban azt vizsgáljuk, hogy folytonos-e a függvény az adott értelmezési tartománybeli pontban – vagy folytonossá tehető-e ott.

7. példa

Hol folytonos a következő függvény?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 7x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 0\}, \\ 2, & \text{ha } x = -7, \\ 5, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megoldás

A függvény minden olyan pontban, ahol a tört értelmezve van, folytonos. A tört $x_1 = -7$ és $x_2 = 0$ pontban nincs értelmezve, de megadtuk, hogy itt milyen értékeket vegyen fel $f(x)$. Ha a függvénynek van határértéke $x_1 = -7$ pontban, és az egyenlő $f(-7)$ -tel, akkor a függvény folytonos:

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x - 7}{x} = 2.$$

Mivel az adott pontbeli határérték és függvényérték megegyezik, ezért $f(x)$ folytonos $x_1 = -7$ -ben. Lássuk most $x_2 = 0$ -t! Ugyanígy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 49}{x^2 + 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 7}{x} = 1 - 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}.$$

Az $f(x)$ függvény csak az $x_2 = 0$ pontban nem folytonos.

Mivel a határérték nem véges, ezért nem is tudunk megadni olyan értéket az 5 helyett, amelyre a függvény folytonossá válna.

8. példa

Folytonos-e az $x = 0$ pontban az alábbi függvény? Ha nem, akkor megadható olyan érték a 3 helyett, amelyre már az?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 3, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Megoldás

Az előző példához hasonlóan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 9 \cdot \frac{\sin^2 3x}{(3x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 9 \cdot \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 = 9.$$

Mivel $x = 0$ -beli $f(0)$ függvényérték nem egyenlő a határértékkal, ezért a függvény ebben a pontban nem folytonos. De ha kicseréljük a megadásban szereplő 3-at 9-re, akkor a függvény folytonossá válik.

Felhasznált irodalom:

- ▶ Mozaik Kiadó: Sokszínű matematika - Az analízis elemei tankönyv, 11-12. évfolyam emelt szint (91-97. oldal)



Feladatok:

1. Határozzuk meg a következő függvények határértékét $x=0$ helyen.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-5}{x+6}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2-7x}{5x^3-x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

2. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a megadott helyen.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2x}{x^3 - x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 6x + 8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 5x + 6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

3. Határozzuk meg a megadott függvények határértékét a megadott helyen.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 7x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x + 4} - \sqrt{4 - \sin x}}{x}$

j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

Az $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$ függvényt grafikonja:



Tétel: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4. Határozzuk meg a következő függvények határértékét $+\infty$ -ben.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x-7x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+7}{4x-5x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4-7x^3+3x^2-5x+7}{4x-5x^2-x^4}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2-5x+7)(x^2+x-2)}{(4x-5)(x^3-5x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-5x+7}{4x^2-x^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+7}}{4x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+7}{\sqrt{4x-5x^2}}$

5. Határozzuk meg a következő függvények határértékét a $-\infty$ -ben.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-15x+13}{3x^2-x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+2x+7}{4x^2-x+9}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sin x - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-9}}{3x-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+7})$

6. Folytonosak-e az alábbi függvények az $x=2$ helyen?

a) $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-2}$

b) $x \mapsto \frac{x-2}{x^2-4}$

c) $x \mapsto \frac{x^2-4}{x-2}$

d) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{ha } x \neq 2 \\ 0,25, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$

e) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4}, & \text{ha } x \neq 2 \\ 0,25, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$

7. Válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a függvény folytonos legyen!

a) $x \mapsto \begin{cases} 3x - 2, & \text{ha } x < 5 \\ x + p, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$

b) $x \mapsto \begin{cases} 2x + 5, & \text{ha } x < 5 \\ px + 10, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$

c) $x \mapsto \begin{cases} 4x - 2, & \text{ha } x < 5 \\ px + p, & \text{ha } x \geq 5 \end{cases}$

d) $x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2}, & \text{ha } x \neq -2 \\ p, & \text{ha } x = -2 \end{cases}$